Inégalité de Hadamard

Leçon : 152, 213, 214, 215, (191)

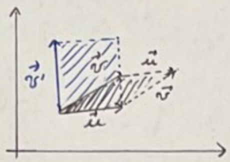
Réf. F. Rouvière, Petit guide du calcul différentiel

Théorème Soit $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$. Alors $|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_n\|$ et il y a égalité si et seulement si les $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$, ou si l'un des termes sont nuls.

<u>Démonstration</u>

Commençons par illustrer le théorème. $|\det(v_1, \dots, v_n)|$ = volume du parallélépipède engendré par $v_1, \dots, v_n$.

<u>$n=2$</u> :



Le théorème affirme que

 $\leq$ 

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ <u>non</u> $\perp$  $= \det(u,v)$

$\|\vec{v}'\| = \|v\|$  $= \|u\| \times \|v\|$

On pose $X = \{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, \|x_1\| = \dots = \|x_n\| = 1 \}$

et $f : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$
$\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \det(x_1, \dots, x_n)$

- f est continue, car le déterminant est polynomiale en les coefficients des x_i
- X est compact, comme produit de compacts : $X = S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}$.

Donc f est bornée sur X et atteint ses bornes, en $(a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}^n)^n$. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $f(e_1, \dots, e_n) = \det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

Donc $f(a_1, \dots, a_n) \geq 1$

Nous allons maintenant montrer que les $(a_1, \dots, a_n)$ forment une bon de $\mathbb{R}^n$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $g_i : (\mathbb{R}^n)^n \to \mathbb{R}$
$\quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \|x_i\|^2 - 1$.

Alors $X = \{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n)^n, g_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = g_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \}$.

Les g_i sont bien de classe C^1, et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

pour tout $(x_1,\dots,x_m)\in X$, pour tout $(h_1,\dots,h_m)\in\mathbb{R}^m$

$$dg_i(x_1,\dots,x_m)(h_1,\dots,h_m) = 2\langle x_i, h_i\rangle.$$

En effet, $g(x+h) = \|x_i+h_i\|^2 - 1$

$$= \underbrace{\|x_i\|^2 - 1}_{=g(x)} + \underbrace{2\langle x_i, h_i\rangle}_{\text{linéaire en } h} + \underbrace{\|h_i\|^2}_{=o(\|h_i\|)}$$

Les différentielles $(dg_i(a_1,\dots,a_m))_{1\le i\le m}$ sont libres. En effet

$\forall i\in[\![1,m]\!], \forall j\in[\![1,m]\!]$ $dg_i(a_1,\dots,a_m)(0,\dots,a_j,\dots,0) = 2\delta_{ij}$.

car $\|a_i\|^2 = 1$

Par le théorème des extremas liés, il existe $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m$ tels que

$$df(a_1,\dots,a_m) = \sum_{i=1}^m \lambda_i dg_i(a_1,\dots,a_m)$$

ie $\forall (h_1,\dots,h_m)\in(\mathbb{R}^m)^m$ $df(a_1,\dots,a_m)(h_1,\dots,h_m) = \sum_{i=1}^m 2\lambda_i\langle a_i, h_i\rangle$ $(*)$

Or f est linéaire par rapport à toutes ses variables, donc

$\forall i\in[\![1,m]\!], \forall h_i\in\mathbb{R}^m$, $df(a_1,\dots,a_m)(0,\dots,0,h_i,0,\dots,0) = f(a_1,\dots,a_{i-1},h_i,a_{i+1},\dots,a_m)$.

(si on note $f_i : x_i \mapsto f(a_1,\dots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\dots,a_m)$, alors f_i est linéaire

donc $\begin{cases} df_i(a_i) = f_i \\ df_i(a_i) = \partial_i f(a_1,\dots,a_m)\end{cases} \Rightarrow f_i(h_i) = df(a_1,\dots,a_m)(0\dots0\,h_i\,0\dots0)$)

Par $(*)$ il vient donc $f(a_1,\dots,a_{i-1},h_i,a_{i+1},\dots,a_m) = 2\lambda_i\langle a_i,h_i\rangle$

En particulier, pour $h_i = a_i$, comme $\|a_i\|=1$ on a $\lambda_i = \frac{1}{2}f(a_1,\dots,a_m) \geq \frac{1}{2}$.

ie $2\lambda_i \geq 1 > 0$

De plus, si $i\neq j$, alors avec $h_i = a_j$ on obtient

$$\underbrace{f(a_1,\dots,a_j,\dots,\underset{\uparrow\, i\text{ème position}}{a_j},\dots,a_m)}_{=0} = 2\lambda_i\langle a_i,h_i\rangle = \underbrace{2\lambda_i}_{\neq 0}\langle a_i,a_j\rangle = 0$$

Donc la famille $(a_1,\dots,a_m)$ est une base orthonormale.

La matrice $(a_1 | \cdots | a_m)$ est orthogonale, donc $\det(a_1, \dots, a_m) = \pm 1$.

On $f(a_1, \dots, a_m) = \det(a_1, \dots, a_m) \geq 1$. Donc $\boxed{f(a_1, \dots, a_m) = 1.}$

Soit $(v_1, \dots, v_m) \in (\mathbb{R}^n)^n$. Si l'un des v_i est nul, on a trivialement

$$|\det(v_1, \dots, v_m)| = 0 \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|.$$

On suppose qu'ils sont tous non nuls. On peut les normaliser. On a alors

$$f\Big(\underbrace{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|}}_{\in X}\Big) \leq f(a_1, \dots, a_m) = 1.$$

Par homogénéité, $\det(v_1, \dots, v_m) \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|$.

En considérant la famille $(v_2, v_1, v_3, \dots, v_m)$, il vient

$$\underbrace{-\det(v_1, \dots, v_m)}_{= \det(v_2, v_1, v_3, \dots, v_m)} \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|.$$

Donc $\boxed{|\det(v_1, \dots, v_m)| \leq \|v_1\| \cdots \|v_m\|.}$

- Si $|\det(v_1, \dots, v_m)| = \|v_1\| \cdots \|v_m\|$.
  - → Si l'un des $v_i = 0$, OK.
  - → Sinon : $f\left(\pm \frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_m}{\|v_m\|}\right) = 1 = \max_X f$

  On a vu que cela implique que $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une base orthogonale.

- Si $(v_i)_{1 \leq i \leq m}$ est orthogonale, on a bien $|\det(v_1, \dots, v_m)| = \|v_1\| \cdots \|v_m\|$.

□

C'est assez facile. On rajoute ça au début et on fait Hadamard en application.

Théorème Soit U ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f_1,\dots,f_k \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, $x^0 \in U$ tq $df_1(x^0),\dots,df_k(x^0)$ soient des formes linéaires indépendantes et

$$N := \{x \in U,\ f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0\}.$$

Si $g \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ et $g|_N$ admet un extremum local en x_0, alors

$$dg(x^0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \, df_i(x^0).$$

Preuve On pose $F : U \to \mathbb{R}^{n-k}$, $x \mapsto (f_1(x),\dots,f_{n-k}(x))$

Alors $dF(x_0)$ est surjective (par liberté des $df_i(x_0)$)

et N est la sous-variété définie par l'équation associée à la fonction F, i.e. $\cancel{N = F^{-1}(0)}$

Soit $T_{x_0}N$ l'espace tangent en x_0. Mq $T_{x_0}N \subset \ker[df(x_0)]$.

Soit $v \in T_{x_0}N$. Il existe $\gamma : I \to \cancel{\mathbb{R}^n}\ \gamma$, $\mathcal{C}^1$, tel que $\gamma'(0) = v$ et $\gamma(0) = x_0$.

Alors, comme $f|_N$ admet un ext. local en x_0, on a

$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t))_{t=0} = 0$. Or $(f \circ \gamma)'(t)_{t=0} = (df(\gamma(t))(\gamma'(t)))_{t=0}$ $\cancel{= df}$

$\Rightarrow df(x_0)(v) = 0$, donc $T_{x_0}N \subset \ker[df(x_0)]$

Mais $T_{x_0}N = \ker[dF(x_0)]$ et $dF(x_0) = (df_1(x_0),\dots,df_k(x_0))$

$\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{k} df_k(x_0) \subset \ker df(x_0)$. + algèbre linéaire. □